Substituição em integrais definidas

Se g' for contínua no intervalo [a, b] e f for contínua na imagem de g(x) = u, então

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Exemplo 1

a) Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

b) Calcule $\int_{0}^{\pi/4} (1+sen2x)^3 \cos 2x\,dx$

Integrais definidas de funções simétricas

Teorema

Seja f contínua no intervalo simétrico [-a, a]

(i) Se f é uma função par, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) Se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exemplo 2

Calcular

$$a)\int_{-1}^{1}(x^4+3x^2+1)dx$$

$$b)\int_{-1}^{1}(x^5+3x^3+x)dx$$

$$c)\int_{-5}^{5}(2x^3+3x^2+7x)dx$$

Definição

Se f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo de [a,b], então a área de região entre as curvas y = f(x) e y = g(x) de a até b é a integral de (f – g) de a até b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observações

- Ao aplicar essa definição, convém esboçar as curvas. O gráfico revelará qual delas é a curva superior, e qual é a curva inferior.
- Caso os limites de integração não estejam determinados é necessário determinar onde as curvas se cruzam.
- Depois é só integrar f – g para descobrir a área.

Exemplo 3

- Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$.

Exemplo 4

- Determinar a área da região do primeiro quadrante que é delimitada acima por $y = \sqrt{x}$ e abaixo pelo eixo x e pela reta y = x – 2 .